Universitat Autònoma de Barcelona
Curs 2002-2003

Economía de la Información[1]

Ejercicio 1 Un terrateniente quiere contratar los servicios de un campesino para cultivar sus tierras. El terrateniente vive en el campo y controla el trabajo del campesino a su servicio; la información es simétrica. La cosecha puede ser buena o mala: $(x_b, x_m) = (8, 5)$, donde x_b (resp. x_m) significa cosecha buena (resp. mala). El tipo de cosecha depende de la dedicación del campesino a su trabajo y de la meteorología. El campesino elige entre dos niveles de esfuerzo $e \in \{0, 1\}$, donde $e = 1$ (resp. $e = 0$) significa trabajar duro (resp. poco). La probabilidad de recoger una buena cosecha aumenta con la dedicación del campesino:

	$e = 0$	$e = 1$
p_b	$1/3$	$2/3$
p_m	$2/3$	$1/3$

El terrateniente propone un contrato $\mathbf{c} = (e, w_b, w_m)$ que estipula el esfuerzo que debe realizar el campesino, y los pagos w_b y w_m que el terrateniente se compromete a abonar a su empleado según el tipo de cosecha obtenido. Tenemos:

$$\begin{cases} B(x-w) = (x-w)^{\alpha}, \ 1/2 \leq \alpha \leq 1 \\ u(w) - v(e) = w^{\beta} - e, \ 1/2 \leq \beta \leq 1 \end{cases}$$

donde, $B(x-w)$ y $u(w)$ son las funciones de utilidad Von Neumann-Morgenstern del terrateniente y del campesino, respectivamente, y $v(e)$ la función de desutilidad del esfuerzo del campesino. Además, $\underline{U} = 1$.

(a) Escribir el programa de maximización del principal cuando el contrato fija $e = 1$.

(b) ¿Para qué valor de α el terrateniente es neutro ante el riesgo? Con este valor de α, hallar el contrato óptimo cuando $1/2 < \beta < 1$. Comentar.

(c) ¿Para qué valor de β el campesino es neutro ante el riesgo? Con este valor de β, hallar el contrato óptimo cuando $1/2 \leq \alpha < 1$. Comentar.

(d) Hallar las dos ecuaciones que caracterizan los pagos w_b, w_m del contrato óptimo en el caso general.

(e) Suponemos que $1/2 < \alpha, \beta < 1$. Calcular los índice de Arrow-Pratt de aversión al riesgo $r_P(x-w)$ y $r_A(w)$ del terrateniente y del campesino, respectivamente.

(f) El terrateniente pensaba ofrecer un contrato de tipo: $w_i = \underbrace{a}_{\text{sueldo base}} + \underbrace{bx_i}_{\text{bonus variable}}$. ¿Puede hacerlo en este caso? ¿Por qué?

(g) Suponemos ahora que $B(x-w) = 1 - e^{-\alpha(x-w)}$ y $u(w) = 1 - e^{-\beta w}$. ¿Puede proponer ahora el terrateniente un contrato óptimo tipo "sueldo base más bonus"? Si la respuesta es afirmativa, calcular el bonus b.

[1] Antoni Calvó Armengol. http://selene.uab.es/acalvo. Email: antoni.calvo@uab.es.

Solución del ejercicio 1 Derivando obtenemos:

$$\begin{cases} B'(x-w) = \alpha (x-w)^{\alpha-1} \\ u'(w) = \beta w^{\beta-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} B''(x-w) = \alpha(\alpha-1)(x-w)^{\alpha-2} \\ u''(w) = \beta(\beta-1) w^{\beta-2} \end{cases}$$

(a) Tenemos $p_b(1) = 2/3$ y $p_m(1) = 1/3$. Cuando $e = 1$, el principal maximiza:

$$\max_{w_b, w_m} \tfrac{2}{3}(x_b - w_b)^{\alpha} + \tfrac{1}{3}(x_m - w_m)^{\alpha} \quad \text{sujeto a} \quad \tfrac{2}{3} w_b^{\beta} + \tfrac{1}{3} w_m^{\beta} - 1 \geq 1 \ (RP)$$

es decir,

$$\max_{w_b, w_m} 2(8 - w_b)^{\alpha} + (4 - w_m)^{\alpha} \quad \text{sujeto a} \quad 2w_b^{\beta} + w_m^{\beta} \geq 6 \ (RP)$$

(b) Cuando $\alpha = 1$, $B(x-w) = x - w$, función lineal en su argumento, y el principal es neutro. El contrato óptimo consiste en un pago fijo $w = w_b = w_m$. Este contrato es el que reparte óptimamente el riesgo. Para hallar el valor de w, recordamos que el contrato óptimo es eficiente. Por consiguiente, la restricción de participación del agente está saturada. Formalmente,

$$2w^{\beta} + w^{\beta} = 6 \Leftrightarrow w = 2^{1/\beta}.$$

(c) Cuando $\beta = 1$, $u(w) = w$, función lineal en su argumento, y el agente es neutro. El contrato óptimo consiste en una franquicia $k = x_b - w_b = x_m - w_m$, cantidad fija que recibe el principal. Este contrato es el que reparte óptimamente el riesgo. Los ingresos del agente son variables e iguales a $w_b = x_b - k$, y $w_m = x_m - k$. Para hallar el valor de w, recordamos que el contrato óptimo es eficiente. Por consiguiente, la restricción de participación del agente está saturada. Formalmente (recordando que $\beta = 1$),

$$2w_b + w_m = 6 \Leftrightarrow 2(8-k) + (5-k) = 6 \Leftrightarrow k = 5.$$

1. Retomando las ecuaciones del punto (a), el Lagrangiano se escribe:

$$\mathcal{L} = 2(8 - w_b)^{\alpha} + (5 - w_m)^{\alpha} + \lambda[2w_b^{\beta} + w_m^{\beta} - 6].$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_b} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha(8-w_b)^{\alpha-1} + 2\beta\lambda w_b^{\beta-1} = 0 \\ -\alpha(5-w_m)^{\alpha-1} + \beta\lambda w_m^{\beta-1} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha(8-w_b)^{\alpha-1}}{\beta w_b^{\beta-1}} \\ \frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha(5-w_m)^{\alpha-1}}{\beta w_m^{\beta-1}} \end{cases},$$

por consiguiente, la primera ecuación es:

$$w_m^{\beta-1}(8 - w_b)^{\alpha-1} = w_b^{\beta-1}(5 - w_m)^{\alpha-1},$$

mientras que la segunda ecuación viene dada por la restricción de participación saturada, a saber:

$$2w_b^{\beta} + w_m^{\beta} = 6.$$

Cuando $\alpha = 1$, se deriva de estas ecuaciones que $w_b = w_m = w = 2^{1/\beta}$, como en el punto (b). Cuando $\beta = 1$, se deriva de estas ecuaciones que $8 - w_b = 5 - w_m = k = 5$, como en el punto (c).

(e) Tenemos $r_P(x-w) = -\frac{\alpha-1}{x-w}$ y $r_A(w) = -\frac{\beta-1}{w}$.

(f) En un contrato tipo "sueldo más bonus" se cumple $\frac{dw_b}{dx_b} = \frac{dw_m}{dx_m} = b$, es decir, variación del salario respeto al excedente constante. Al contrato óptimo, tenemos

$$\frac{dw_i}{dx_i} = \frac{r_P(x_i - w_i)}{r_P(x_i - w_i) + r_A(w_i)}.$$

que varía con el pago w_i y nivel de cosecha x_i. La derivada no es constante, y no podemos hallar contratos óptimos lineales en este caso.

(g) Ahora tenemos

$$\begin{cases} B'(x-w) = \alpha e^{-\alpha(x-w)} \\ u'(w) = \beta e^{-\beta w} \end{cases} \qquad \begin{cases} B''(x-w) = \alpha^2 e^{-\alpha(x-w)} \\ u''(w) = \beta^2 e^{-\beta w} \end{cases}$$

y las medidas de Arrow-Pratt son $r_P(x-w) = \alpha$ y $r_A(w) = \beta$, constantes. Por tanto, podemos hallar contratos óptimos lineales con un bonus $b = \alpha/(\alpha+\beta)$.