Universitat Autònoma de Barcelona
Facultat de Ciències Econòmiques
i Empresarials

Curs 2004-2005

El mètode de Kuhn-Tucker

Juan A. Crespo
Dpt. de Economia i de Història Econòmica

Índex

1 Optimització amb restriccions de desigualtat. 1
1.1 El mètode de Kuhn-Tucker. 4
1.1.1 Quan pot fallar el mètode? 10
1.2 Problemes còncaus i problemes convexes. 12

Capítol 1

Optimització amb restriccions de desigualtat.

Un problema general d'optimització té la forma:

$$\textbf{Òptims de } f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\textbf{subjecta a} \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq c_1 \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) \leq c_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq c_m \end{cases} \tag{1.1}$$

on per nosaltres les funcions $f, g_1, \ldots g_m$ seran sempre funcions de classe $\mathcal{C}^1$ sobre un obert.

Econòmicament aquest problema correspon a optimitzar una funció objectiu que està subjecta a uns recursos limitats però que no necessàriament hem d'esgotar.

Anem a introduir una mica de nomenclatura sobre aquest problema. Primer de tot definim coses sobre el domini.

Definició 1.1. *El conjunt $\mathcal{F}$ de punts $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que satisfan les desisgualtats 1.1 s'anomena **conjunt factible** o conjunt admissible. És a dir,*

$$\mathcal{F} = \{x \text{ tals que } g_1(x) \leq c_1, \ldots, g_m(x) \leq c_m\} .$$

*Un punt $x_0 \in \mathcal{F}$ s'anomena **punt factible**.*

Definició 1.2. *Diem que un punt factible $x_0 \in \mathcal{F}$ satura la i-èssima restricció quan $g_i(x_0) = c_i$. Direm en aquest cas que g_i és activa o saturada al punt x_0.*

Al cas que $g_i(x_0) < c_i$ x_0 no satura g_i. Direm aleshores que g_i és inactiva o no saturada al punt x_0.

En resum, si $x_0 \in \mathcal{F}$ llavors

- Si $g_i(x_0) = c_i$ RESTRICCIÓ ACTIVA (SATURADA).
- Si $g_i(x_0) < c_i$ RESTRICCIÓ INACTIVA (NO SATURADA).

ATENCIÓ: No s'ha de confondre SATISFER amb ACTIVAR.

Les definicions anteriors fan referència a on són els punts dins el conjunt factible. Les que venen ara fan referència a la forma que tenen les restriccions a un punt factible.

Definició 1.3. *Un punt factible $x_0 \in \mathcal{F}$ es diu que és regular si:*

- *o bé x_0 no satura cap restricció ($g_i(x_0) < c_i\ \forall i$),*
- *o bé els gradients de les restriccions saturades per x_0 són linealment independents a x_0.*

Per veure si els gradients de les restriccions actives a x_0 són linealment independents hem de fer el següent:

Suposem que x_0 activa s restriccions diguem-ne $g_{k_1}, \ldots, g_{k_s}$ aleshores cal que veiem que

$$rang \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_{k_1}}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \dfrac{\partial g_{k_1}}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_{k_s}}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \dfrac{\partial g_{k_s}}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = s\ .$$

ATENCIÓ: Si **només** hi ha **una restricció activa** al punt x_0, diguem-ne g_i aleshores el punt x_0 és regular si, i només si,

$$\nabla g_i(x_0) \neq (0, \ldots, 0)\ .$$

És a dir, al cas que només hi ha una restricció activa a x_0, x_0 no és regular (és irregular) si totes les derivades parcials de l'única restricció activa en aquell punt són zero.

Exemple 1.4. *Considerem el conjunt factible $\mathcal{F}$ donat per les restriccions*

$$\begin{cases} g_1(x,y) = x^4 - y \leq 0 \\ g_2(x,y) = y - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

Sobre aquest conjunt els punts que saturen totes dues restriccions són:

$$\begin{cases} x^4 - y = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$$

Solucionant s'obté els punts $A = (1, 1)$, $B = (-1, -1)$ *i* $C = (0, 0)$. *Anem a veure si són regulars o no. Primer de tot calculem els gradients de* g_1 *i* g_2 *a un punt qualsevol:*

$$\begin{cases} \nabla g_1(x, y) = (4x^3, -1) \\ \nabla g_2(x, y) = (-2x, 1) \end{cases}$$

- *Al punt* $A = (1, 1,)$ *veiem que*

  $$rang \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

  per tant el punt $(1, 1)$ *és regular.*

- *Al punt* $B = (-1, -1)$ *tenim que:*

  $$rang \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

  Llavors és també un punt regular.

- *Al punt* $C = (0, 0)$ *tenim que:*

  $$rang \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

  Així doncs és un punt IRREGULAR.

Ara mirem que passa si només una de les restriccions és activa:

- *Si només* g_1 *és activa. Tenim que* $\nabla g_1(x, y) = (4x^3, -1)$. *Com que aquest vector MAI és el* $(0, 0)$ *llavors tots els punts que activen només la primera restricció són regulars.*

- *Si només* g_2 *és activa. Tenim que* $\nabla g_1(x, y) = (-2x, 1)$. *Com que aquest vector MAI és el* $(0, 0)$ *llavors tots els punts que activen només la segona restricció són regulars.*

Resumint, l'únic punt irregular d'aquest conjunt és el punt $(0, 0)$.

1.1 El mètode de Kuhn-Tucker.

Suposem que volem resoldre el problema

$$\textbf{Òptims de } f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\textbf{subjecta a } \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq c_1 \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) \leq c_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq c_m \end{cases} \tag{1.2}$$

on $f, g_1, \ldots, g_m$ són funcions de classe $\mathcal{C}^1$ definides sobre un obert. Kuhn i Tucker van introduir als anys 50 un mètode per solucionar-lo que es basa en el mètode de Lagrange i en l'interpretació que us vaig donar dels multiplicadors de Lagrange, de fet aquest mètode ja havia estat descobert per Karush als anys 30. Essencialment, s'adonen que si un recurs no s'esgota quan obtenim un òptim aleshores el seu multiplicador associat és zero. A més a més, veuen que als màxims els multiplicadors no poden ser negatius i als mínims no poden ser positius. El teorema diu el següent:

Teorema 1.5. *Sigui x_0 un extrem local del problema d'optimització (1.2). Suposem que x_0 és un punt regular. Llavors si definim*

$$\mathcal{L}(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - c_j)$$

existeixen uns únics $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tals que:

1. $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x_0) = 0.$

2. $\lambda_j(g_j(x_0) - c_j) = 0.$

3. $\lambda_i \geq 0$ *si x_0 és un màxim local i* $\lambda_i \leq 0$ *si x_0 és un mínim local.*

ATENCIÓ: La segona condició ens diu que o bé $g_i(x_0) - c_i = 0$ (és a dir, la restricció g_i és activa a x_0) o aleshores automàticament el multiplicador de Lagrange és zero. És a dir, si un recurs no s'esgota en un extrem local llavors el seu preu ombra és zero.

Observació 1.6. • *El mètode de Kuhn-Tucker troba, dins el conjunt de punts regulars, tots els candidats a òptim local. És a dir, si hi ha un punt que no és regular, pot passar que hi hagi un òptim però que el mètode no ens ho digui.*

- *Si a un punt solució de Kuhn-Tucker tots els multiplicadors són zero aleshores aquest punt pot ser màxim, mínim o punt de sella. Aquests punts necessiten un estudi extra.*

Exemple 1.7. *Trobar, mitjançant el mètode de Kuhn-Tucker els òptims locals de*

$$f(x,y) = xy \ \textbf{\textit{subjecta a}} \begin{cases} g_1(x,y) = x^2 + y^2 \leq 2 \\ g_2(x,y) = y - x \leq 0 \end{cases}$$

Primer de tot cal escriure la funció lagrangiana del problema:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = xy - \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) - \lambda_2(y - x) \ .$$

Les condicions necessàries que ha de complir un òptim són:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y) = y - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y) = x - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) = 0 \\ \lambda_2(y - x) = 0 \end{cases}$$

Així doncs hem d'estudiar aquest sistema en funció de que les restriccions siguin actives o no. Això essencialment ens dirà si els multiplicadors de Lagrange són automàticament zero o si per contrari no sabem quan valen. Com que hi ha dues restriccions i cada una de elles pot ser activa o inactiva hem d'estudiar 4 casos diferents.

1. *g_1 i g_2 actives. En aquest cas com que $g_1(x,y) - c_1 = 0$ i $g_2(x,y) - c_2 = 0$ llavors no sabem quan valen λ_1 i λ_2. El sistema que tenim és:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y) = y - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y) = x - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

   D'aquí obtenim que $x^2 + x^2 = 2$, és a dir, que $x = \pm 1$. Com que $x = y$ tenim que els punts que satisfan totes dues restriccions són $(1,1)$ i $(-1,-1)$. Veiem si són solucions substituint a les dues primeres equacions:

- *Al punt* $(1,1)$ *tenim:*
$$\begin{cases} 1 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$
Resolent aquest sistema de dues equacions i dues incògnites hom obté:
$$\lambda_1 = 1/2 \;\; i \; \lambda_2 = 0$$
El punt $(1,1)$ *serà doncs un candidat a màxim local del problema.*

- *Al punt* $(-1,-1)$ *obtenim:*
$$\begin{cases} -1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -1 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$
Si resolem, obtenim ara:
$$\lambda_1 = 1/2 \;\; i \; \lambda_2 = 0$$
Així doncs el punt $(-1,-1)$ *serà també un candidat a màxim local.*

Per acabar aquest cas ens hem d'assegurar que no podem tenir punts no regulars. Posem els vectors gradient de les dues restriccions a una matriu:
$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
el rang d'aquesta matriu no serà 2 si el seu determinant és zero. El determinant val $2x+2y$ *i és zero si* $x=-y$*. Però com que tenim la restricció* $x=y$ *això només pot passar si* $x=y=0$*. Però aquest punt no satisfà que* $x^2+y^2=2$*. Llavors no hi ha cap punt irregular.*

De fet això no calia fer-ho en aquest cas ja que els únics punts que saturen totes dues restriccions són el $(1,1)$ *i el* $(-1,-1)$ *i tots dos han aparegut ja com a solucions del problema.*

2. *Ara estudiem el cas en que només* g_1 *és activa. Així doncs ja sabem que* $\lambda_2 = 0$*. El sistema que hem de resoldre és ara:*
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y) = y - 2\lambda_1 x = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y) = x - 2\lambda_1 y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y - x < 0 \;\; \textit{és a dir} \; y < x \end{cases}$$

De les dues primeres equacions obtenim

$$\begin{cases} \lambda_1 = y/2x \\ \lambda_1 = x/2y \end{cases}$$

Igualant, s'obté $x^2 = y^2$ *o, el que és el mateix,* $x = \pm y$. *Ara substituïm a la tercera equació i obtenim* $2x^2 = 2$ *per tant que* $x = \pm 1$. *Tenim aleshores quatre solucions:*

(A) $x = 1$, $y = 1$. *No pot ser ja que cal que* $y < x$.

(B) $x = 1$, $y = -1$. $\surd$

(C) $x = -1$, $y = -1$. *No pot ser ja que cal que* $y < x$.

(D) $x = -1$, $y = 1$ *tampoc val pel mateix motiu que abans.*

En resum de les quatre possibles solucions només ens serveix el punt $(1, -1)$. *Mirem quant valen els multiplicadors de Lagrange. Ja sabem que* $\lambda_2 = 0$.

$$\lambda_1 = y/2x = -1/1 = -1$$

Per tant deduïm que $(1, -1)$ *és un candidat a mínim local del problema.*

Finalment comprovem que no hi ha punts irregulars. Ara només cal veure que cap punt factible que saturi només la primera restricció té gradient nul. Però $\nabla g_1(x, y) = (2x, 2y)$. *Per tal que això valgui* $(0, 0)$ *val que* $x = 0$ *i* $y = 0$ *i aquest punt no satisfà que* $x^2 + y^2 = 2$. *Llavors no hi ha cap punt irregular en aquest cas.*

3. *En aquest cas* g_2 *és activa però* g_1 *inactiva. Així doncs,* $\lambda_1 = 0$. *El sistema que s'ha de resoldre ara és:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y) = y + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y) = x - \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 < 2 \\ y = x \end{cases}$$

Resolem aquest sistema. De les dues primeres equacions s'obté que $y = -x$. *Com que a més a més, s'ha de complir que* $y = x$ *llavors l'única possibilitat és que* $x = y = 0$. *Observeu que* $(0, 0)$ *si que compleix* $x^2 + y^2 < 2$. *Finalment,* $\lambda_1 = 0$ *i també* $\lambda_2 = 0$.

Així doncs el punt $(0,0)$ *pot ser màxim, mínim o punt de sella.*

Per veure que no ens deixem cap possible candidat en aquest cas, cal que veiem que no hi ha punts factibles on el gradient de g_2 *sigui nul. Però* $\nabla g_2(x,y) = (-1,1)$, *per tant mai s'anul.la.*

4. *L'últim cas correspon a totes dues restriccions inactives. Ara* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. *El sistema a resoldre en aquest cas és més fàcil:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y) = y = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y) = x = 0 \\ x^2 + y^2 < 2 \\ y < x \end{cases}$$

Directament obtenim que $x = 0$ *i* $y = 0$ *però observeu que aquest punt no satisfà* $y < x$ *per tant no correspon a aquest cas (de fet ja l'hem obtingut abans!).*

Resumint, els punt que hem obtingut amb el mètode de Kuhn-Tucker són:

- $(1,1)$ *i* $(-1,-1)$ *amb* $\lambda_1 = 1/2$ *i* $\lambda_2 = 0$. *Candidats a màxim local.*
- $(1,-1)$ *amb* $\lambda_1 = -1/2$ *i* $\lambda_2 = 0$. *Candidat a mínim local.*
- $(0,0)$ *amb* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. *Pot ser màxim, mínim o punt de sella.*

I ara que? *Observeu que la funció objectiu és contínua i que el conjunt factible és compacte (de fet és un semi-circle tancat) per tant el teorema de Weierstrass ens assegura que hi ha un màxim i un mínim global del problema. Com que totes les funcions són* $\mathcal{C}^1$ *i no hi ha punts irregulars els únics candidats a màxim i mínim global són els extrems local que hem detallat ara fa un moment. Per veure on és el màxim i el mínim només cal que avaluem la funció als punts anteriors i comparem:*

- $f(1,1) = 1$
- $f(-1,-1) = 1$
- $f(1,-1) = -1$
- $f(0,0) = 0$

Aleshores el mínim global de la funció és $(1,-1)$ *i hi ha dos màxims globals* $(1,1)$ *i* $(-1,-1)$.

Observació 1.8. *El mètode de Kuhn-Tucker és molt laboriós. És fàcil deixar-se casos i/o oblidar-se de comprovar condicions. Us recomano que sigueu sistemàtics en aplicar-ho. Comenceu sempre pel cas on totes les restriccions siguin actives. Després aneu desactivant una per una les restriccions. Després desactiveu les restriccions de dos en dos, i així succesivament. Com a referència es bo saber que si hi ha m restriccions haureu d'estudiar 2^m casos.*

Exemple 1.9. *Resoldre el problema*

$$\textbf{\textit{Òptims de }} x^2 + y^2 + y - 1 \textbf{\textit{ subjecta a }} g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$$

Primer de tots observeu que tant la funció objectiu con la restricció són de tipus $\mathcal{C}^1$. A més a més el conjunt factible és compacte, ja que és un disc tancat, per tant, el teorema de Weierstrass ens assegura que tindrem un màxim i un mínim. D'altra banda el conjunt factible no té punts irregulars, ja que $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0)$ implica que $x = 0$ i $y = 0$, però aquest punt no activa la restricció. Per tant el mètode de Kuhn-Tucker detectarà tots els possible candidat a màxim i mínim del problema.

La funció lagrangiana és:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + y - 1 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Aleshores les condicions que han de complir els candidats són:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 2y + 1 - 2\lambda y = 0 \\ \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

En aquest exemple tenim una única restricció per tant hi ha dos casos a resoldre.

1. *Restricció activa. Per tant λ és desconeguda. El sistema esdevé:*

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 2y + 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

   Traient factor comú a la primera i segona restriccions obtenim

$$\begin{aligned} 2x(1 - \lambda) &= 0 \\ 2y(1 - \lambda) &= -1 \end{aligned}$$

   De la primera equació hom veu que $x = 0$ o bé $\lambda = 0$. Aquesta segona opció no pot ser ja que aleshores tindríem a la segona equació $0 = -1$. Així doncs $x = 0$, per tant $y^2 = 1$, és a dir $y = \pm 1$. Tenim aleshores dues solucions $(0, 1)$ i $(0, -1)$. Veiem qui són els multiplicadors de Lagrange:

- *Al punt* $(0,1)$ *substituint a* $2y(1-\lambda) = -1$ *tenim que* $\lambda = 3/2 > 0$. *Aquest punt és llavors un candidat a màxim local.*
- *Al punt* $(0,-1)$ *fem el mateix i s'obté* $\lambda = 1/2$. *Per tant també és un candidat a màxim local.*

2. *El segon cas és g inactiva. Per tant* $\lambda = 0$. *El sistema que tenim és radicalment més fàcil:*

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

La solució és $(0,-1/2)$. *Com que* $\lambda = 0$ *no sabem si és màxim, mínim o punt de sella.*

Finalment, tenim tres candidats i com ja hem dit al començament segur que entre ells hi ha el màxim i el mínim. Avaluem la funció:

- $f(0,1) = 1$
- $f(0,-1) = -1$
- $f(0,-1/2) = -5/4$

Per tant el màxim es dona a $(0,1)$ *i el mínim a* $(0,-1/2)$. *Això segon ja ho sabíem ja que era l'únic punt on podia haver un mínim.*

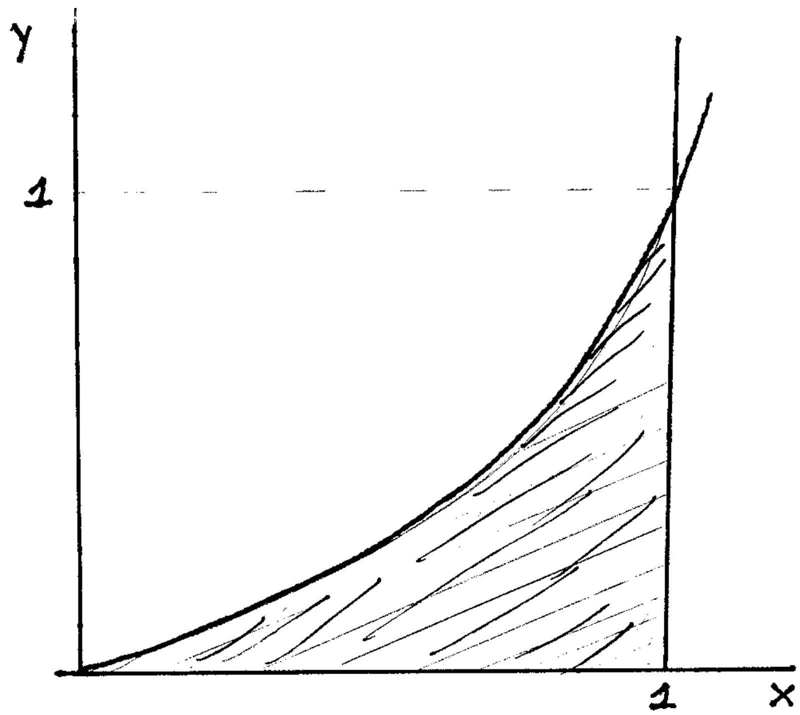
1.1.1 Quan pot fallar el mètode?

Com ja vam veure al mètode de Lagrange cal que anem amb molta cura amb les condicions del mètode de Kuhn-Tucker. És obvi que el mètode no funciona si les funcions no son $\mathcal{C}^1$. Veurem ara mateix que la condició de regularitat és important.

Exemple 1.10. *Suposeu que volem resoldre el problema*

$$\textbf{\textit{Mínim de }} f(x,y) = x \textbf{\textit{ subjecta a }} \begin{cases} y - x^3 \leq 0 \\ x \leq 1 y \geq 0 \end{cases}$$

Podem dibuixar el conjunt factible:



mirant el dibuix és clar que el valor més petit de la funció $f(x, y) = x$ *es dona a* $x = 0$, $y = 0$. *Sense fer Kuhn-Tucker!!!!!*

Ara escriurem les condicions de Kuhn-Tucker per veure si se satisfan al punt $(0, 0)$.

La funció lagrangiana és

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = x - \lambda_1(y - x^2) - \lambda_2(x - 1) - \lambda_3(-y)$$

Per tant, les condicions necessàries de Kuhn i Tucker són:

$$\begin{cases} 1 - 3\lambda_1 x^3 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1(y - x^3) = 0 \\ \lambda_2(x - 1) = 0 \\ \lambda_2 y = 0 \end{cases}$$

Al punt $(0, 0)$, *la primera i la tercera restricció són actives i la segona no, per tant*

$\lambda_2 = 0$. *El sistema substituint* $x = 0$ *i* $y = 0$ *queda:*

$$\begin{cases} 1 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Per tant arribem a contradicció. És a dir $(0, 0)$ *no és solució del mètode de Kuhn-Tucker.*

Havíem vist al començament que $(0, 0)$ *és el mínim global. Com és que no l'hem trobat? Si us fixeu, els gradients de la primera i la tercera restricció, que són les actives a aquest punt, són* $(-2x^2, 1)$ *i* $(0, -1)$ *respectivament. Si ara els avaluem al punt* $(0, 0)$ *tenim* $(0, 1)$ *i* $(0, -1)$ *que obviament son linealment dependents. Així el punt* $(0, 0)$ *no és regular. És per això que el mètode de Kuhn-Tucker ha estat incapaç de veure que a aquest punt havia un mínim.*

La condició de regularitat és moltes vegades difícil de comprovar. Per exemple si una de les vostres restriccions fos $g(x, y) = x^8 + 3x^4 + x + y^5 + y^2 + 3y = 5$ un punt que fos irregular ha de complir que

$$\begin{cases} 8x^7 + 12x^3 + 1 = 0 \\ 5y^4 + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

I creieu-me si us dic que no és gens fàcil trobar els punts que solucionen aquest sistema.

1.2 Problemes còncaus i problemes convexes.

A tots els exemples que hem fet els conjunts factibles han estat compactes. Sense aquesta condició en general no podem afirmar que hagi màxims i/o mínims globals. Ara veurem que sota certes condicions sobre els conjunts factibles i les funcions objectiu si que tindrem extrems.

Definició 1.11.

- *Un problema on la funció objectiu és* ***còncava*** *i el conjunt factible és* ***convex*** *s'anomena* ***problema còncau****.*
- *Un problema on la funció objectiu és* ***convexa*** *i el conjunt factible és* ***convex*** *s'anomena* ***problema convex****.*

Proposició 1.12. *Donat un problema còncau (resp. convex). Si un punt regular $x_0 \in \mathcal{F}$ compleix:*

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x_0) = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n.$
- $\lambda_j(g_j(x_0) - c_j) = 0$ *per* $j = 1, \ldots, n$
- $\lambda_j \geq 0$ *per* $j = 1, \ldots, n$ *(resp.* $\lambda_j \leq 0$*)*

aleshores x_0 és un màxim (resp. mínim) global del problema.

Dit en altres paraules, si un problema còncau o convex no té punts irregulars aleshores les condicions de Kuhn-Tucker esdevenen necessàries i suficients per al problema de maximització i minimització respectivament.

Encara però podem tenir problemes, la condició de regularitat pot fallar i aleshores tenir un màxim o un mínim que no satisfaci les condicions de Kuhn i Tucker, ja hem dit bans que no és senzill en general comprovar que no hi ha punts irregulars. En problemes còncaus i convexes hi ha una condició alternativa molt més fàcil de veure, és l'anomenada **condició de Slater**.

Definició 1.13. *Un problema d'optimització verifica la condició de Slater si existeix almenys un punt del conjunt factible de manera que totes les restriccions són inactives a aquest punt. El que és el mateix:*

$$\textit{Hi ha } x_0 \in \mathcal{F} \textit{ tal que } g_i(x_0) < c_i \ \forall i$$

Si aquesta condició es verifica aleshores les condicions de Kuhn-Tucker esdevenen necessàries i suficients. Més concretament:

Teorema 1.14. *Les condicions de Kuhn-Tucker són condicions necessàries i suficients de:*

- *màxim global als problemes còncaus que satisfan la condició d'Slater.*
- *mínim global als problemes convexes que satisfan la condició d'Slater.*

Exemple 1.15 (Examen setembre 2003). *Donat el següent problema restringit:*

$$\textbf{\textit{Òptims de }} f(x,y) = -(x-6)^2 - (y-3)^2 \textbf{\textit{ subjecta a }} \begin{cases} y \geq x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) Comprova que es tracta d'un problema còncau i que se satisfà la condició de Slater.

b) És el punt $(6,3)$ *solució del problema?*

c) Comproveu que el punt $(2,4)$ *és solució del mètode de Kuhn-Tucker d'aquest problema i calculeu els multiplicadors de Lagrange-Kuhn-Tucker d'aquest punt.*

d) Justifiqueu el motiu pel qual $(2,4)$ *és el màxim global del problema.*

e) Pot tenir un mínim global aquest problema?

Anem a resoldre aquest problema.

a) Per veure que el problema és còncau cal que veiem que el conjunt factible és convex i que la funció objectiu és còncava. El conjunt factible ve donat per

$$\begin{cases} y \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 - y \leq 0 \\ x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \end{cases}$$

$y \geq x^2$ és l'hipèrgraf de la funció $h(x) = x^2$ que és convexa a tot $\mathbb{R}$ ja que $h''(x) = 2 > 0$. Així doncs $y \geq x^2$ és convex. D'altra banda, $x \geq 0$ és un semi-pla per tant és convex. Llavors el conjunt factible, que és la intersecció d'aquests dos conjunts, és també convex.

Ara estudiem la nostra funció $f(x,y) = -(x-6)^2 - (y-3)^2$. La matriu hessiana és:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

És una matriu definida negativa, ja que $\Delta_1(x,y) = -2 < 0$ i $\Delta_2(x,y) = 4 > 0$. Per tant la funció és estrictament còncava. Hem vist doncs que el problema és còncau.

Ara comprovem la condició de Slater. Cal que trobem un punt del conjunt factible on totes les restriccions sigui inactives. La segona restricció és $x \geq 0$ per tant cal que $x > 0$. Posem per exemple $x = 1$. També cal que la primera restricció sigui inactiva, és a dir, hem d'escollir y de manera que $y > x^2$. Si prenem ara $y > 1^2 = 1$ ja ho tindrem. Agafem per exemple $y = 10$. El punt $(1,10)$ és factible i no activa cap restricció, per tant la condició de Slater es compleix.

b) El punt $(6, 3)$ no és solució del problema. El motiu és que ni tantsols és factible ja que $3 \not\geq 6^2$.

c) Per veure que el punt $(2, 4)$ és solució del mètode de K-T cal que veiem que es compleixen totes les condicions. Fixem-nos abans de res que aquest punt activa la restricció $y \geq x^2$ però no $x \geq 0$, per tant directament sabem que $\lambda_2 = 0$. Escrivim la funció de Lagrange del problema:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = -(x-6)^2 - (y-3)^2 - \lambda_1(x^2 - y) - \lambda_2(-x)$$

Si el punt és solució de K-T cal que es compleixi que

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = -2(x-6) - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = -2(y-3) + \lambda_1 = 0 \\ y = x^2 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Si ara substituïm x i y per $(2, 4)$ tenim

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(2, 4, \lambda_1, 0) = -2(2-6) - 4\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(2, 4, \lambda_1, 0) = -2(4-3) + \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2\surd \\ 4 = 2^2\surd \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Per tant el punt $(2, 4)$ és solució del mètode de K-T amb $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 0$.

d) El nostre és un problema còncau. Les funcions són totes de tipus $\mathcal{C}^1$. La condició de Slater se satisfà. Aleshores un punt que satisfà les condicions de Kuhn-Tucker amb multiplicadors positius és automàticament un màxim global. Així doncs $(2, 4)$ és el màxim global del problema.

e) La funció no pot tenir mínim sobre el conjunt factible. Fixem-nos que els punts de la forma $(0, y)$ són tots dins el conjunt factible. Si fem tendir la y cap a infinit obtenim

$$\lim_{y\to\infty} f(0, y) = \lim_{y\to\infty} -(y-3)^2 - 36 = -\infty$$

Per tant la nostra funció no pot tenir mínim global.