Universitat Autònoma de Barcelona
Curs 2002-2003

Breviario de Economía de la Información[1]

Riesgo moral

El modelo general

En el modelo de riesgo moral, el principal no oberva la decisiones del agente durante el desarrollo de la relación contractual. Por ejemplo, si el agente tiene dos niveles de esfuerzo posibles a su disposición, con riesgo moral, el principal no sabe cuál de los dos niveles de esfuerzo está desempeñando el agente; sólo observa el excedente producido.

Debido a esta asimetría de información durante el desarrollo de la relación contractual, el nivel de esfuerzo (no verificable por parte del principal) no entra como cláusula del contrato entre el principal y el agente. El contrato consiste simplemente en una lista de pagos $\mathbf{c} = (w_1, ..., w_n)$ que indican la modalidad de reparto de cada nivel de excedente x_i posible (w_i para el agente; $x_i - w_i$ para el principal).

Dada la asimetría de información, el agente elige libremente el nivel de esfuerzo que quiere proveer durante la relación contractual. Cuando el principal propone su contrato $\mathbf{c} = (w_1, ..., w_n)$, tiene que tener en cuenta la decisión (libre) sobre el nivel de esfuerzo (invisible a sus ojos) que el agente tomará si acepta el contrato. El principal sólo puede pretender obtener un control indirecto sobre este nivel de esfuerzo mediante los pagos que propone en su contrato $\mathbf{c}$. El contrato óptimo, ahora, debe conciliar la eficiencia (en forma de reparto óptimo del riesgo entre los participante) con la provisión de incentivos adecuados al agente. Resulta del programa de optimización siguiente:

$$\max_{e,w_1,...,w_n} EB\left(\ell\left(e\right), \mathbf{c}\right) \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{c} \underbrace{Eu\left(\ell\left(e\right), \mathbf{c}\right) - v\left(e\right) \geq \underline{U}}_{\text{restricción de participación } (RP)} \\ \underbrace{e \in \arg\max_{\underline{e}} \left\{Eu\left(\ell\left(e\right), \mathbf{c}\right) - v\left(e\right)\right\}}_{\text{restricción de inventivos } (RI)} \end{array}$$

La restricción de incentivos refleja la libertad de elección por parte del agente del nivel de esfuerzo que desempeña, posible gracias a la asimetría de información que mantiene esta decisión oculta para el principal. Dada esta libertad de decisión, para cada contrato $\mathbf{c}$ propuesto por el principal, el agente elige el esfuerzo que maximiza su bienestar $Eu\left(\ell\left(e\right), \mathbf{c}\right) - v\left(e\right)$. Esta maximización queda reflejada en la restricción de incentivos (RI). El principal, cuando la información es asimétrica, diseña el contrato para inducir indirectamente, a través de la decisión egoísta del agente, el nivel de esfuerzo de su conveniencia (para paliar así la imposibilidad de ponerse de acuerdo sobre un nivel de esfuerzo en el propio contrato). El contrato $\mathbf{c}$ provee pués incentivos pensados para incidir sobre la decisión de e por parte del agente.

El modelo con dos niveles de esfuerzo

En el modelo con dos niveles de esfuerzo, el agente elige entre dos valores del esfuerzo, e^H y e^L. Supongamos que $v\left(e^H\right) > v\left(e^L\right)$, es decir, el esfuerzo e^H es más costoso de proveer que el esfuerzo e^L. El nivel e^H representa la situación en la que el agente trabaja duro, mientras que realizando e^L

[1] Estos apuntes pueden contener errores tipográficos o incluso de cálculo y no cubren necesariamente toda la materia proporcionada en clase por el profesor. En caso de encontrar errores, podéis escribir a antoni.calvo@uab.es.

su esfuerzo es bajo. Nos referimos a e^H como el nivel alto o máximo de esfuerzo (*High* en inglés) y a e^L como el nivel bajo o mínimo (*Low* en inglés).

Si el principal quiere inducir la elección del esfuerzo mínimo e^L por parte del agente, le basta con proponer un contrato basado en un pago fijo $w^{\min}$ que sature la restricción de participación (RP), es decir,

$$w^{\min} = u^{-1}\left(\underline{U} + v\left(e^L\right)\right)$$

En este caso no hay problema de riesgo moral. El principal paga al agente una cantidad fija igual a la que pagaría con información simétrica para garantizarle la utilidad de reserva $\underline{U}$. Efectivamente, con esta cantidad tenemos:

$$u\left(w^{\min}\right) - v\left(e^L\right) \geq u\left(w^{\min}\right) - v\left(e^H\right),$$

es decir, se cumple trivialmente la restricción de incentivos (RI) que garantiza que, ante el pago fijo $w^{\min}$, el agente efectivamente elige e^L.

Analizamos pues la situación en la que el principal quiere implementar e^H. Si el contrato propuesto es $\mathbf{c} = (w_1, ..., w_n)$, la restricción de incentivos que garantiza la selección de e^H por parte del principal para la modalidad de reparto de los excedentes fijada en $\mathbf{c}$ es:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\left(e^H\right) u\left(w_i\right) - v\left(e^H\right) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i\left(e^L\right) u\left(w_i\right) - v\left(e^L\right)$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{n}\left[p_i^H - p_i^L\right] u\left(w_i\right) \geq v\left(e^H\right) - v\left(e^L\right),$$

donde $p_i^H = p_i\left(e^H\right)$ y $p_i^L = p_i\left(e^L\right)$. El agente elige e^H cuando la esperanza de ganancia asociada a este esfuerzo (en términos de utilidad) supera el sobrecoste correspondiente.

El programa del principal que quiere inducir el esfuerzo alto e^H es:

$$\max_{w_1,...,w_n} \sum_{i=1}^{n} p_i^H(e)\, B\left(x_i - w_i\right) \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{r} \sum_{i=1}^{n} p_i^H u\left(w_i\right) - v(e) \geq \underline{U} \\ \sum_{i=1}^{n}\left[p_i^H - p_i^L\right] u\left(w_i\right) \geq v\left(e^H\right) - v\left(e^L\right) \end{array}$$

Reordenamos los excedentes de tal modo que $x_1 < x_2 < ... < x_n$, es decir, de peor a mejor excedente. Sabemos que cada nivel de esfuerzo e genera una distribución de probabilidades $p_1(e), ..., p_n(e)$ sobre el excedente producido. Supongamos que aumentar el nivel de esfuerzo producido aumenta (estocásticamente) el valor del resultado producido (o, de manera equivalente, disminuye la probabilidad de obtener los peores niveles del excedente). Formalmente,

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^H < \sum_{i=1}^{k} p_i^L, \text{ para } k = 1, ..., n-1,$$

es decir, la probabilidad de obtener un excedente "malo", inferior o igual a x_k, es mayor con el esfuerzo bajo e^L que con el esfuerzo alto e^H. Cuando estas desigualdades se cumplen, decimos que $p_1^H, ..., p_n^H$ domina estocásticamente (dominación estocástica de primer orden) a $p_1^L, ..., p_n^L$. Obviamente, cuando $k = n$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^H = \sum_{i=1}^{n} p_i^L = 1,$$

que refleja la condición de normalización de las distribuciones de probabilidad.

Consideremos por ejemplo:

	e^L	e^H
$p_1(e)$	$2/3$	$1/3$
$p_2(e)$	$1/3$	$2/3$

Entonces, $p_1^H < p_1^L$, es decir, p_1^H, p_2^H domina estocásticamente a p_1^L, p_2^L.

Análisis del modelo con dos niveles de esfuerzo

El lagrangiano es:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(w_1, \ldots, w_n, \lambda, \mu) &= \sum_{i=1}^{n} p_i^H B(x_i - w_i) \\ &+\lambda \left[\sum_{i=1}^{n} p_i^H u(w_i) - v\left(e^H\right) - \underline{U}\right] \\ &+\mu \left[\sum_{i=1}^{n} \left[p_i^H - p_i^L\right] u(w_i) - v\left(e^H\right) + v\left(e^L\right)\right]\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden respecto al salario, $\partial\mathcal{L}/\partial w_i = 0$, $i = 1, ..., n$ se escriben:

$$-p_i^H B'(x_i - w_i) + \lambda p_i^H u'(w_i) + \mu \left[p_i^H - p_i^L\right] u'(w_i) = 0,\ i = 1, ..., n$$

En lo que sigue, supongamos que el principal es neutro ante el riesgo, es decir, $B'(x_i - w_i) = 1$, $i = 1, ..., n$. Además de simplificar el análisis, este supuesto permite comparar la estructura de pagos en este caso de información asimétrica con el pago fijo del contrato óptimo cuando la información es simétrica. Tenemos:

$$\frac{p_i^H}{u'(w_i)} = \lambda p_i^H + \mu \left[p_i^H - p_i^L\right], i = 1, ..., n$$

Si sumamos de $i = 1$ a $i = n$, dado que $\sum_{i=1}^{n} p_i^H = \sum_{i=1}^{n} p_i^L = 1$, tenemos:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^H}{u'(w_i)} > 0$$

Por tanto, la restricción de participación (RP) está saturada. Manipulando de nuevo la condición de primer orden obtenemos:

$$\frac{1}{u'(w_i)} = \lambda + \mu \left[1 - \frac{p_i^L}{p_i^H}\right],\ i = 1, ..., n$$

Demostramos ahora que la restricción de incentivos (RI) también está saturada, es decir, que $\mu \neq 0$. Supongamos lo contrario, a saber, que $\mu = 0$. Entonces, $u'(w_1) = ...u'(w_n) = 1/\lambda$ lo que implica que el pago al agente es constante. Pero entonces, la restricción de incentivos (RI) se escribe:

$$u(w) \sum_{i=1}^{n} \left[p_i^H - p_i^L\right] - v\left(e^H\right) + v\left(e^L\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow u(w) \left\{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i^H}_{=1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i^L}_{=1}\right\} - v\left(e^H\right) + v\left(e^L\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow v\left(e^L\right) \geq v\left(e^H\right),$$

que es imposible. Por consiguiente, $\mu \neq 0$ y la restricción de incentivos (RI) también está saturada. Podemos demostrar, además, que $\mu > 0$, que significa que la existencia de un problema de riesgo moral tiene un coste estrictamente positivo para el principal. Los beneficios del principal son estrictamente mayores con información simétrica que con información asimétrica.

Puesto que $\mu > 0$, la ecuación

$$u'(w_i) = \frac{1}{\lambda + \mu\left[1 - \frac{p_i^L}{p_i^H}\right]}$$

implica que los pagos del agente varían en función del resultado. Esta indexación de los pagos al resultado sirve el propósito de proveer incentivos adecuados al agente para inducirle a elegir el nivel de esfuerzo e^H. Sabemos, efectivamente, que el reparto eficiente del riesgo se consigue, en este caso, con una salario constante.

Dado que el agente es averso al riesgo, $u''(w) < 0$. Por tanto, $u'(w)$ es una función decreciente de w. Dado que $\mu > 0$, obtenemos que w_i *decrece con* p_i^L/p_i^H. Los pagos son mayores cuanto más pequeño es el valor del cociente de verosimilitud p_i^L/p_i^H.

Consideremos el siguiente ejemplo con dos matrices distintas de probabilidades (vinculadas al nivel de esfuerzo) que corresponden, por ejemplo, a dos tipos distintos de cultivos en una relación contractual entre terrateniente y campesino.

cultivo A

	e^L	e^H	p_i^L/p_i^H
$p_1(e)$	$2/3$	$1/3$	2
$p_2(e)$	$1/3$	$2/3$	0.5

cultivo B

	e^L	e^H	p_i^L/p_i^H
$p_1(e)$	$4/5$	$1/5$	4
$p_2(e)$	$1/5$	$4/5$	0.25

Anotemos $w_i(A)$ (resp. $w_i(B)$) el pago que recibe el agente que se dedica al cultivo A (resp. cultivo B) cuando el resultado es x_i. Dado que

$$\frac{p_1^L(B)}{p_1^H(B)} > \frac{p_1^L(A)}{p_1^H(A)} > \frac{p_2^L(A)}{p_2^H(A)} > \frac{p_2^L(B)}{p_2^H(B)}$$

tenemos

$$w_1^B < w_1^A < w_2^A < w_2^B$$

Por consiguiente, para cada tipo de cultivo, el agente cobra más cuanto mejor es el resultado, es decir, $w_1^A < w_2^A$ y $w_1^B < w_2^B$ (recordemos que $x_1 < x_2$, por convención). Además, un buen resultado (x_2) para un agente dedicado al cultivo B se premia mejor que un buen resultado para un agente dedicado al cultivo A, es decir, $w_2^A < w_2^B$. Esto se debe a que con el cultivo B el agente que trabaja mucho genera una buena cosecha en un $4/5 = 80\%$ de los casos, cosa que no ocurre con el cultivo A, donde el valor es $2/3 = 67\%$. Por consiguiente, una buena cosecha de cultivo B es información (relativamente) inequívoca de que el campesino ha trabajado duro, y el salario recompensa ese trabajo. Simétricamente, una mala cosecha B es información (relativamente) inequívoca de que el campesino, que tiene un gran control sobre el resultado, ha trabajado poco, y el castigo cuando la cosecha es mala (x_1) es más severo en B que en A, a saber, $w_1^B < w_1^A$.

Por contrato, cuando el principal observa x_i, remunera al agente con un salario w_i. El principal desconoce el nivel de esfuerzo desempeñado por el agente; sólo observa x_i. El principal debe pues utilizar la única variable que observa como fuente de información sobre el comportamiento del agente. Si x_i se obtiene con una probabilidad relativa mucho menor cuando $e = e^L$ que cuando

$e = e^H$, entonces la obtención de un excedente de valor x_i es una indicación (casi) inequívoca de que el agente ha trabajado e^H (pues en caso contrario solo observaríamos x_i con una probabililidad muy pequeña). Con información asimétrica, la remuneración w_i depende del valor informativo del excedente x_i sobre el esfuerzo subyacente. El valor informativo de x_i sobre e^H varía negativamente con p_i^L/p_i^H y, por consiguiente, $w_i = \underset{(-)}{\phi}\left(p_i^L/p_i^H\right)$.

La indexación de los pagos de contrato al resultado depende de la información que éste provee sobre el esfuerzo del agente. El resultado tiene valor en tanto que informa del comportamiento del agente. Los pagos están asociados a esta información y serán crecientes con el resultado si éste tiende a ser mejor cuando el agente moviliza un esfuerzo mayor. Cuando el cociente de verosimilitud es decreciente monótono, es decir,

$$\frac{p_1^L}{p_1^H} > ... > \frac{p_i^L}{p_i^H} > ... > \frac{p_n^L}{p_n^H}$$

entonces el valor informativo de x_i aumenta con i, y el pago mejora con el resultado, es decir,

$$w_i = \underset{(+)}{w}(x_i)$$

Por ejemplo, con:

$\mathbf{p}(e)$	e^L	e^H
$p_1(e)$	$2/3$	$1/3$
$p_2(e)$	$1/3$	$2/3$

tenemos $p_1^L/p_1^H = 2 > 1/2 = p_2^L/p_2^H$.

Análisis del modelo general: el enfoque de primer orden

El modelo general implica una doble maximización:

$$\max_{e,w_1,...,w_n} \sum_{i=1}^{n} p_i(e)\,B(x_i - w_i) \text{ para el principal}$$
$$\max_{e} \sum_{i=1}^{n} p_i(e)\,u(w_i) - v(e) \text{ para el agente}$$

La maximización del agente interviene como restricción (restricción de incentivos (RI)) en el programa de maximización del principal. El enfoque de primer orden consiste en sustituir el programa de maximización del agente por su condición de primer orden, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i'(e)\,u(w_i) - v'(e) = 0.$$

El programa de maximización del principal se transforma en

$$\max_{e,w_1,...,w_n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i(e)\,B(x_i - w_i) \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} p_i(e)\,u(w_i) - v(e) \geq \underline{U} \\ \sum_{i=1}^{n} p_i'(e)\,u(w_i) - v'(e) = 0 \end{array}$$

Determinación de los salarios $w_1, ..., w_n$

El Lagrangiano se escribe:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(w_1,\ldots,w_n,\lambda,\mu\right) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\left(e\right)\left(x_i-w_i\right) \\ &\quad +\lambda\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\left(e\right)u\left(w_i\right)-v\left(e\right)-\underline{U}\right] \\ &\quad +\mu\left[\sum_{i=1}^{n} p_i'\left(e\right)u\left(w_i\right)-v'\left(e\right)\right]\end{aligned}$$

Y las condiciones de primer orden respecto a los pagos son:

$$-p_i\left(e\right)+\lambda p_i\left(e\right)u'\left(w_i\right)+\mu p_i'\left(e\right)u'\left(w_i\right)=0$$

Operando obtenemos:

$$u'\left(w_i\right)=\frac{1}{\lambda+\mu\frac{p_i'(e)}{p_i(e)}}$$

Ahora, la variación de los pagos en función del resultado depende de la forma de la función $p_i'\left(e\right)/p_i\left(e\right)$ que se denomina cociente de verosimilitud. Cuando esta expresión crece con i, un resultado alto es una señal de que el esfuerzo alto fue incorporado con mayor probabilidad. En otras palabras, es más verosímil que cuando el esfuerzo es alto, el resultado sea bueno. En este caso, el pago w_i depende positivamente de x_i.

Si reescribimos la condición de primer orden correspondiente al caso de riesgo moral con dos esfuerzos, obtenemos:

$$u'\left(w_i\right)=\frac{1}{\lambda+\mu\left[1-\frac{p_i^L}{p_i^H}\right]}=\frac{1}{\lambda+\mu\left[\frac{p_i^H-p_i^L}{p_i^H}\right]},$$

donde $p_i^H-p_i^L$, la variación de la probabilidad cuando el esfuerzo aumenta de e^L a e^H, es el análogo de $p_i'\left(e\right)$, la variación de la probabilidad cuando el esfuerzo aumenta en una cantidad infinitesimal de e a $e+de$, en el caso con esfuerzo continuo.

Determinación del esfuerzo e

La condición de primer orden respecto al esfuerzo del Lagrangiano se escribe:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i'\left(e\right)\left(x_i-w_i\right)+\lambda\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} p_i'\left(e\right)u\left(w_i\right)-v'\left(e\right)\right]}_{=0}+\mu\left[\sum_{i=1}^{n} p_i''\left(e\right)u\left(w_i\right)-v''\left(e\right)\right]=0,$$

es decir,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i'\left(e\right)x_i}_{\text{beneficios marginales}}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i'\left(e\right)w_i-\mu\left[\sum_{i=1}^{n} p_i''\left(e\right)u\left(w_i\right)-v''\left(e\right)\right]}_{\text{costes marginales}}$$

Con información simétrica, la restricción de participación determina el nivel óptimo de esfuerzo. Al derivar, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i'\left(e\right)x_i=\sum_{i=1}^{n} p_i'\left(e\right)w_i-\lambda\left[\sum_{i=1}^{n} p_i'\left(e\right)u'\left(w_i\right)-v'\left(e\right)\right].$$

Con riesgo moral, el coste de la restricción de incentivos es el elemento más importante en la determinación del nivel del esfuerzo.

Ejemplos

Abundan los ejemplos de riesgo moral como modalidad particular de información asimétrica en una relación contractual: accionariado y directivos de una empresa; actividades de prestación de servicios cuando el nivel de esfuerzo del prestatario afecta a la calidad del servicio (mecánico, médico, etc.); empleador y empleado, et.

Con riesgo moral, incluso cuando el principal es neutro al riesgo y el agente averso al riesgo, el principal no tiene incentivos para cargar con todo el riesgo. De ser así, el agente elegiría egoístamente la acción que le supone el menor esfuerzo y que, generalmente, no coincide con la elección óptima. Los contratos óptimos de riesgo moral realizan un compromiso óptimo entre:

- el reparto de los riesgos, que tiende hacia pagos constantes o poco dependientes del resultado
- la provisión de incentivos, que tiende a supeditar los pagos a los resultados.

Vemos con algunos ejemplos la forma precisa que toma este compromiso.

Un modelo de seguro contra incendios

El seguro ilustra a la perfección el conflicto entre reparto de riesgos e incitaciones que caracteriza las situaciones con riesgo moral. Efectivamente, la misión esencial de las compañías de seguros es el reparto del riesgo por mutualización. Por otro lado, el riesgo individual puede depender del comportamiento del cliente de la aseguradora.

Consideremos un modelo de seguros contra incendios.

El propietario de una casa de valor W puede suscribir una poliza de seguro contra incendios. La prima del seguro es q y el reembolso por parte de la aseguradora en caso de incendio (siniestro total) es R. La probabilidad de que se produzca un incendio es:

$$p(e) = (1-e)\, p^H + e p^L = p^H + e\left[p^L - p^H\right] \text{ donde } p^H > p^L$$

depende del nivel de cautela $e \in [0,1]$ que muestra el propietario de la casa para protegerla de los incendios. Tenemos $p'(e) = p^L - p^H < 0$, es decir, a mayor esfuerzo e por parte del propiertario, menor probabilidad de incendiarse la casa. Extremar un nivel de precauciones e en proteger la casa de un incendio tiene un coste $v(e) = e$. La aseguradora debe fijar los valores de R y de q.

La determinazión de la poliza de seguros es un problema de contrato con información asimétrica entre la compañía de seguros (el principal) y el propietario de la casa (el agente) con esfuerzo continuo. Debemos caracterizar los elementos característicos de este tipo de situación, que són:

- las utilidades (Von Neumann-Morgenstern) B y u del principal y del agente,
- el coste del esfuerzo del agente $v(e)$
- el conjunto de esfuerzos posibles, aquí $[0,1]$
- los valores posibles del excedente, las modalidades de reparto de estos excedentes contempladas y las probabilidades asociadas, que agrupamos en la tabla siguiente:

Excedentes	Parte Agente	Parte Principal	Probabilidades
x_1	w_1	$x_1 - w_1$	$p_1(e)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	w_n	$x_n - w_n$	$p_n(e)$

En el caso que nos ocupa, esta tabla se escribe:

Excedentes	Parte Agente	Parte Principal	Probabilidades
la casa se quema: $x_1 = 0$	$R - q$	$q - R$	$p(e) = p^H + e\left[p^L - p^H\right]$
la casa no se quema: $x_2 = W$	$W - q$	q	$1 - p(e)$

donde se cumple $x_1 < x_2$. Además,

$$\frac{p_1'(e)}{p_1(e)} = \frac{p'(e)}{p(e)} = \frac{p^L - p^H}{p(e)} < 0$$

mientras que

$$\frac{p_2'(e)}{p_2(e)} = -\frac{p'(e)}{1 - p(e)} = -\frac{p^L - p^H}{1 - p(e)} > 0$$

es decir, $p_1'(e)/p_1(e) < p_2'(e)/p_2(e)$, el coeficiente de verosimilitud crece con el valor del excedente para cada valor de e. Por consiguiente, la parte del excedente que se lleva el agente también crece con el excendente, a saber $w_1 < w_2$, que en este caso se escribe $R - q < W - q \Leftrightarrow R < W$, es decir, la compañía siempre reembolsa menos que el valor real de la casa.

Determinamos el contrato óptimo utilizando las ecuaciones correspondiente al enfoque de primer orden, es decir:

$$u'(w_i) = \frac{1}{\lambda + \mu\frac{p_i'(e)}{p_i(e)}}$$

En este caso, se escriben:

$$\begin{cases} u'(R - q) = \frac{1}{\lambda + \mu\frac{p^L - p^H}{p(e)}}, \text{ para } i = 1 \\ u'(W - q) = \frac{1}{\lambda + \mu\frac{p^H - p^L}{1 - p(e)}}, \text{ para } i = 2 \end{cases}$$

es decir, dos ecuaciones con dos incógnitas R y q que podemos hallar como funciones de e, λ y μ. Por ejemplo, cuando $u(x) = \sqrt{x}$ tenemos $u'(x) = 1/2\sqrt{x}$, y las ecuaciones son:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R-q}} = \frac{1}{\lambda + \mu\frac{p^L - p^H}{p(e)}} \\ \frac{1}{2\sqrt{W-q}} = \frac{1}{\lambda + \mu\frac{p^H - p^L}{1 - p(e)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = q + \frac{1}{4}\left(\lambda + \mu\frac{p^L - p^H}{p(e)}\right)^2 \\ q = W - \frac{1}{4}\left(\lambda + \mu\frac{p^H - p^L}{1 - p(e)}\right)^2 \end{cases}$$

Racionamiento en el mercado de crédito

Una empresa acude a un banco para pedir un préstamo por valor I. El préstamo se dedica en su totalidad a financiar un proyecto de inversión. Existen dos proyectos posible que anotamos a ó b, entre los que puede elegir la empresa. El beneficio previsto devengado por el proyecto a, en caso de ser exitoso, es Π_a. De manera similar, Π_b corresponde al beneficio devengado por el proyecto de tipo b, cuando es exitoso. Las probabilidades de éxito son, respectivamente, p_a y p_b, siendo $1 - p_a$ y $1 - p_b$ las probabilidades de fracaso. Supongamos que $\Pi_b > \Pi_a$, a saber, el proyecto b da más beneficios que a, y $p_a\Pi_a > p_b\Pi_b$, es decir, el valor esperado de a (teniendo en cuenta la probabilidad de éxito) supera el de b. Las dos desigualdades juntas implican que $p_a > p_b$, es decir, el proyecto a es más "seguro" que b.

En caso de éxito del proyecto $\tau \in \{a, b\}$, la empresa posee Π_τ y paga al banco un interés R. En caso de fracaso del proyecto, la empresa quiebra y el banco no recupera nada. Las beneficios esperados son:

$$\begin{cases} p_\tau(\Pi_\tau - R) \text{ para la empresa que elige el proyecto } \tau \in \{a, b\} \\ p_\tau R \text{ para el banco que presta a una empresa que elige } \tau \in \{a, b\} \end{cases}$$

El préstamo del banco a la empresa es un contrato, donde el banco es el principal y la empresa el agente. El banco fija la cantidad R a reembolsar.

Información simétrica Si el tipo de proyecto en el que la empresa invierte el dinero prestado puede incluirse en el contrato de préstamo, estamos ante una situación con información simétrica. Entonces, dado que $p_a > p_b$, se cumple que $p_a R > p_b R$, es decir, el banco obtiene un beneficio mayor si la empresa invierte en a. Por consiguiente, el contrato óptimo on información simétrica prescribe invertir en a. El interés óptimo R^* que se acuerda pagar en este caso se obtiene de la restricción de participación saturada. Si el agente sólo tiene esta perspectiva de ingresos, sus ingresos de reserva son $\underline{U}= 0$, la restricción de participación se escribe:

$$p_a\left(\Pi_a - R^*\right) = 0 \Leftrightarrow R^* = \Pi_a$$

El empresario obtiene un beneficio esperado nulo.

Información asimétrica: riesgo moral Si el tipo de proyecto no puede incluirse como cláusula de contrato entre el banco y la empresa, estamos ante una situación con información asimétrica de tipo riesgo moral. Identificamos los elementos de la tabla característica de este tipo de problema:

Excedentes	Parte Agente	Parte Principal	Probabilidades
x_1	w_1	$x_1 - w_1$	$p_1(e)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	w_n	$x_n - w_n$	$p_n(e)$

En este caso, tenemos:

Excedentes	Parte Agente	Parte Principal	Probabilidades
inversión no exitosa: $x_1 = 0$	0	0	$p_1(\tau)$
inversión a exitosa: $x_2 = \Pi_a$	$\Pi_a - R$	R	$p_2(\tau)$
inversión b exitosa: $x_3 = \Pi_b$	$\Pi_b - R$	R	$p_3(\tau)$

Las probabilidades correspondientes a cada nivel de excedente identificado dependen del proyecto $\tau \in \{a, b\}$ en el que invierte el empresario. Tenemos:

	$\tau = a$	$\tau = b$
p_1	$1 - p_a$	$1 - p_b$
p_2	p_a	0
p_3	0	p_b

Distinguimos el caso en el que el empresario elige a del caso en el que elige b.

Caso 1 (a preferido a b) Dado R, la restricción de incentivos (RI) indica que la empresa elige a en lugar de b si:

$$p_1(a)\,w_1 + p_2(a)\,w_2 + p_3(a)\,w_3 \geq p_1(b)\,w_1 + p_2(b)\,w_2 + p_3(b)\,w_3$$

$$\Leftrightarrow p_a\left(\Pi_a - R\right) \geq p_b\left(\Pi_b - R\right)$$

$$\Leftrightarrow R \square \frac{p_a \Pi_a - p_b \Pi_b}{p_a - p_b} = \widehat{R}$$

Si se cumple la condición $\widehat{R} \geq R$, la empresa elige a. Por consiguiente, sus pagos son $p_a(\Pi_a - R)$, y la restricción de participación (RP) se escribe:

$$p_a(\Pi_a - R) \geq 0 \Leftrightarrow \Pi_a \geq R.$$

Sin embargo, dado que $\Pi_a \geq \widehat{R}$,[2] la condición de (RP) es redundante cuando se cumple ya (RI).

Caso 2 (b preferido a a) Siguiendo el razonamiento anterior, la restricción de incentivos (RI) que indica que la empresa elige b en lugar de a se escribe:

$$\widehat{R} < R$$

mientras que la restricción de participación (RP) es ahora:

$$p_b(\Pi_b - R) \geq 0 \Leftrightarrow \Pi_b \geq R$$

Por consiguiente, la elección del proyecto de inversión por parte del empresario (agente) es:

$$\begin{cases} \tau = a \text{ si } 0 \Box R \underset{(RI)}{\Box} \widehat{R} \underset{(RP)}{\Box} \Pi_a \\ \tau = b \text{ si } \widehat{R} \underset{(RI)}{<} R \underset{(RP)}{\Box} \Pi_b \end{cases}$$

De acuerdo con estas decisiones, los beneficios $p_\tau R$ del banco (principal) son:

$$\begin{cases} p_a R \text{ si } 0 \Box R \Box \widehat{R} \\ p_b R \text{ si } \widehat{R} < R \Box \Pi_b \end{cases}$$

El banco (principal) elige el nivel R^{**} óptimo que maximiza sus beneficios. Los dos candidatos maximizadores son los dos extremos de las horquillas identificadas más arriba, es decir, $\widehat{R}$ y Π_b, con los que el banco (principal) obtiene unos beneficios $p_a\widehat{R}$ y $p_b\Pi_b$, respectivamente. Distinguimos dos casos:

(1) $p_a\widehat{R} < p_b\Pi_b$: entonces, $R^{**} = \Pi_b$, el agente invierte en b y obtiene un beneficio esperado $p_b(\Pi_b - R^{**}) = 0$. Este valor óptimo de los intereses bancarios para el préstamo cumple holgadamente la restricción de incentivos (RI) por la que el empresario invierte en b y satura la restricción de participación (RP) correspondiente, por lo que el empresario obtiene un beneficio esperado nulo. Con información simétrica, el banco elige el mismo nivel de intereses Π_b cuando obliga al empresario a invertir en b, de ahí que se sature la restricción de participación.;

(2) $p_a\widehat{R} > p_b\Pi_b$: entonces, $R^{**} = \widehat{R}$, el agente invierte en a y obtiene un beneficio esperado $p_a\left(\Pi_a - \widehat{R}\right) > 0$ estrictamente positivo. Este valor óptimo de los intereses bancarios para el préstamo satura la restricción de incentivos (RI) por la que el empresario invierte en a y cumple holgadamente la restricción de participación (RP) correspondiente. El empresario obtiene un beneficio esperado estrictamente positivo que refleja las rentas informativas del agente en presencia de riesgo moral. Efectivamente, para inducir al empresario a elegir el proyecto más seguro, a, el banco debe proponer un interés inferior al del caso con información simétrica, $\Pi_a > \widehat{R}$; de lo contrario, el empresario invertiría en b.

En el caso (2), y sólo en este caso, los empresarios obtienen un beneficio estrictamente positivo. Si hay N empresarios en la economía, los N empresarios piden un crédito de I para obtener estos beneficios estrictamente positivos. Por tanto, el banco recibe un petición de liquidez total igual a NI. Si sólo dispone de una cantidad $L < NI$, algunos empresarios se quedan sin préstamo: hay racionamiento en el mercado de crédito.

[2] Efectivamente, $\Pi_a \geq \widehat{R}$ es equivalente a $(p_a - p_b)\Pi_a \geq p_a\Pi_a - p_b\Pi_b$, equivalente a $p_b(\Pi_b - \Pi_a) \geq 0$, que es verdad.

Empleador y empleado

Vemos ahora un ejemplo de aplicación del enfoque de primer orden. El principal es el empleador que contrata a un empleado, el agente. Si el agente desempeña un nivel de esfuerzo e, el principal observa un resultado o excedente $x = e + \varepsilon$, suma del esfuerzo realizado y de un componente aleatorio ε. Supongamos que ε sigue una distribución normal de media 0 y varianza σ^2, es decir, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Tenemos, $E(x) = e$, y $Var(x) = b^2\sigma^2$. La variabilidad del resultado, o la pérdida de control del mismo por parte del agente vía el esfuerzo que desempeña, crece con σ^2.

El principal propone un contrato lineal

$$w = a + bx,$$

que consiste en un pago fijo a más un bonus variable bx, igual a una fracción b del resultado total x. El principal es neutro ante el riesgo, y su utilidad es:

$$\begin{aligned} E(x - w) &= -a + (1-b)E(x) \\ &= -a + (1-b)e. \end{aligned}$$

El coste del esfuerzo para el agente es $v(e) = \frac{1}{2}e^2$, y su utilidad esperada es de tipo media varianza, es decir,

$$\begin{aligned} Eu(w,e) &= E(w) - \frac{1}{2}\rho Var(w) - v(e) \\ &= a + be - \frac{1}{2}b^2\sigma^2 - \frac{1}{2}e^2, \end{aligned}$$

donde ρ mide la aversión al riesgo del agente.

Aplicando el enfoque del primer orden, el programa del principal es:

$$\max_{a,b,e} -a + (1-b)e \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{l} a + be - \frac{1}{2}b^2\sigma^2 - \frac{1}{2}e^2 \geq \underline{U} \\ \left(a + be - \frac{1}{2}b^2\sigma^2 - \frac{1}{2}e^2\right)' = 0 \end{array}$$

Primero resolvemos la condición de primer orden que refleja la restricción de incentivos y que consiste en hallar el valor del esfuerzo que maximiza la utilidad esperada del agente (en un contexto con riesgo moral, la elección del esfuerzo queda en manos del agente), es decir, en resolver la siguiente ecuación, donde la derivada se toma respecto a e:

$$\left(a + be - \frac{1}{2}b^2\sigma^2 - \frac{1}{2}e^2\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow b - e = 0$$

Tenemos, pues, $e = b$. Sustituyendo e por b en el programa de maximización del principal y en la restricción de participación a la que se somete esta maximización, tenemos:

$$\max_{a,b} -a + (1-b)b \quad \text{sujeto a} \quad a + b^2 - \frac{1}{2}b^2\sigma^2 - \frac{1}{2}b^2 \geq \underline{U}$$

El Lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = -a + (1-b)b + \lambda \left[a + b^2 - \frac{1}{2}b^2\sigma^2 - \frac{1}{2}b^2 - \underline{U}\right].$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda = 1 \\ b = \frac{1}{1+\rho\sigma^2} \end{array} \right.$$

En el contrato fijo-variable óptimo, la fracción $1/\left(1+\rho\sigma^2\right)$ del resultado total que constituye la parte variable del contrato disminuye con ρ, el nivel de aversión al riesgo del agente, y con σ^2, inversamente vinculado al control directo sobre el resultado final que tiene el agente (a través del esfuerzo que desempeña). El contrato óptimo combina, pues, el objetivo de reparto óptimo del riesgo entre el principal y el agente con el objetivo de provisión adecuada de incentivos al agente.

Estos contrato tiene validez empírica, véase Aggarwal and Sanwick, 1999, *Journal of Political Economy*.