Universitat Autònoma de Barcelona
Curs 2003-2004

Soluciones : Lista de problemas 1

A. Las situaciones son:
- Compra de coche usado: selección adversa,
- Seguro de salud: selección adversa,
- Educación y calificación del trabajador: riesgo moral (selección adversa),
- Préstamo por un proyecto de inversión: riesgo moral.

B.
Caso 1: riesgo moral
Principal: Luis XIV
Agente: Recaudadores de impuestos
Conflito de intereses: Luis XIV quiere que los agentes (recaudadores) recaudan los impuestos, haciendo el esfuerzo más grande que pueden. Los recaudadores quieren hacer el menor esfuerzo y recaudar los menos de impuestos que pueden porque se sienten amenazados.

Caso 2: selección adversa
Principal: Los proprietarios de los bares
Agente: Los camareros
Conflito de intereses: antes de contratar los camareros, los propietarios no saben si los camareros trabajan mucho o poco. Todavía, antes de empezar a trabajar, los camareros saben lo que van hacer porque conocen su tipo.Esta es su información privada. Ellos quieren maximizar sus beneficios y eligen la opción de tener una parte de sueldo fijo y una parte variable (las propinas). A los propietarios de los bares estos contratos caen bien, porque saben que parte del pago de los trabajadores son propinas y entonces que los camareros trabajaran lo más que pueden.

C.
- Funciones de utilidad
Principal: $\alpha \in (0,1)$
$B(x,w) = (x-w)^{\alpha}$,
$B'(x,w) = \alpha(x-w)^{\alpha-1} \geq 0$,
$B"(x,w) = \alpha(\alpha-1)(x-w)^{\alpha-2} < 0$,
Agente: $\beta \in (0,1)$
$U(w,e) = w^{\beta} - e$,
$U'(w,e) = \beta w^{\beta-1} \geq 0$,
$U"(w,e) = \beta(\beta-1) w^{\beta-2} < 0$,

1) Principal neutro antes el riesgo ($\alpha = 1$) - Agente averso al riesgo
$B(x,w) = (x-w), U(w,e) = w^{\beta} - e$,
Situación: información simétrica con $e = 4$
Problema del principal:

$$\begin{cases} \underset{w_a,w_b}{Max}\ \frac{1}{3}(60-w_a) + \frac{2}{3}(40-w_b), \\ \text{s.a } \frac{1}{3}w_a^{\beta} + \frac{2}{3}w_b^{\beta} - 4 \geq 10 \end{cases}$$

Contrato óptimo: $w_a = w_b = w$,

$$w_a^\beta + 2w_b^\beta = 42 \Rightarrow 3w^\beta = 42 \Rightarrow w = 14^{\frac{1}{\beta}}.$$

Situación: información simétrica con $e = 6$
Problema del principal:

$$\begin{cases} \underset{w_a,w_b}{Max}\ \frac{2}{3}(60 - w_a) + \frac{1}{3}(40 - w_b), \\ \text{s.a}\ \frac{2}{3}w_a^\beta + \frac{1}{3}w_b^\beta - 6 \geq 10 \end{cases}$$

Contrato óptimo: $w_a = w_b = w$,

$$2w_a^\beta + w_b^\beta = 48 \Rightarrow 3w^\beta = 48 \Rightarrow w = 16^{\frac{1}{\beta}}.$$

Comentario: Más esfuerzo, más salario.
2) Principal averso al riesgo - Agente neutro antes el riesgo ($\beta = 1$)
$B(x, w) = (x - w)^\alpha, U(w, e) = w - e$,
Situación: información simétrica con $e = 4$

$$\begin{cases} \underset{w_a,w_b}{Max}\ \frac{1}{3}(60 - w_a)^\alpha + \frac{2}{3}(40 - w_b)^\alpha, \\ \text{s.a}\ \frac{1}{3}w_a + \frac{2}{3}w_b - 4 \geq 10 \end{cases}$$

Contrato franquicia : $x_a - w_a = x_b - w_b = k$
$w_a = (60 - k), w_b = (40 - k)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(60 - k) + \frac{2}{3}(40 - k) - 4 &= 10 \Rightarrow k = 32,6 \\ w_a &= (60 - k) = 27,4 \\ w_b &= (40 - k) = 7,4 \end{aligned}$$

Situación: información simétrica con $e = 6$

$$\begin{cases} \underset{w_a,w_b}{Max}\ \frac{2}{3}(60 - w_a)^\alpha + \frac{1}{3}(40 - w_b)^\alpha, \\ \text{s.a}\ \frac{2}{3}w_a + \frac{1}{3}w_b - 6 \geq 10 \end{cases}$$

Contrato franquicia : $x_a - w_a = x_b - w_b = k$
$w_a = (60 - k), w_b = (40 - k)$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(60 - k) + \frac{1}{3}(40 - k) - 6 &= 10 \Rightarrow k = 37,3 \\ w_a &= (60 - k) = 22,7 \\ w_b &= (40 - k) = 2,7 \end{aligned}$$

Comentario: Más esfuerzo, menos salario.

3) Principal averso al riesgo - Agente averso al riesgo
$B(x, w) = (x - w)^\alpha, U(w, e) = w^\beta - e$,
Situación: información simétrica con $e = 4$

$$\begin{cases} \underset{w_a,w_b}{Max}\ \frac{1}{3}(60 - w_a)^\alpha + \frac{2}{3}(40 - w_b)^\alpha, \\ \text{s.a}\ \frac{1}{3}w_a^\beta + \frac{2}{3}w_b^\beta - 4 \geq 10 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
L &= (60-w_a)^\alpha + 2(40-w_b)^\alpha + \lambda[w_a^\beta + 2w_b^\beta - 42] \\
\frac{dL}{dw_a} &= -\alpha(60-w_a)^{\alpha-1} + \beta\lambda w_a^{\beta-1} = 0, \qquad \lambda = \frac{\alpha(60-w_a)^{\alpha-1}}{\beta w_a^{\beta-1}} \\
\frac{dL}{dw_b} &= -2\alpha(40-w_b)^{\alpha-1} + 2\beta\lambda w_b^{\beta-1} = 0, \qquad \lambda = \frac{\alpha(40-w_b)^{\alpha-1}}{\beta w_a^{\beta-1}} \\
\frac{dL}{d\lambda} &= w_a^\beta + 2w_b^\beta = 42
\end{aligned}
$$

Solución finale:

$$
\begin{cases}
w_b^{\beta-1}(60-w_a)^{\alpha-1} = \beta w_a^{\beta-1}(40-w_b)^{\alpha-1} \\
w_a^\beta + 2w_b^\beta = 42
\end{cases}
$$

Situación: información simétrica con $e = 6$

$$
\begin{cases}
\underset{w_a, w_b}{Max}\ \frac{2}{3}(60-w_a)^\alpha + \frac{1}{3}(40-w_b)^\alpha, \\
\text{s.a}\ \frac{2}{3}w_a^\beta + \frac{1}{3}w_b^\beta - 6 \geq 10
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= 2(60-w_a)^\alpha + (40-w_b)^\alpha + \lambda[2w_a^\beta + w_b^\beta - 48] \\
\frac{dL}{dw_a} &= -2\alpha(60-w_a)^{\alpha-1} + 2\beta\lambda w_a^{\beta-1} = 0, \qquad \lambda = \frac{\alpha(60-w_a)^{\alpha-1}}{\beta w_a^{\beta-1}} \\
\frac{dL}{dw_b} &= -\alpha(40-w_b)^{\alpha-1} + \beta\lambda w_b^{\beta-1} = 0, \qquad \lambda = \frac{\alpha(40-w_b)^{\alpha-1}}{\beta w_a^{\beta-1}} \\
\frac{dL}{d\lambda} &= w_a^\beta + 2w_b^\beta = 42
\end{aligned}
$$

Solución finale:

$$
\begin{cases}
w_b^{\beta-1}(60-w_a)^{\alpha-1} = \beta w_a^{\beta-1}(40-w_b)^{\alpha-1} \\
2w_a^\beta + w_b^\beta = 48
\end{cases}
$$

Comentario: Cuando el principal y el agente son aversos al riesgo, las cpo del problema son las mismas. Es el vinculo de participación que varía.